

CCF 全国信息学奥林匹克联赛 NOIP2018 复赛（模拟赛）题解

by IcePrincess_1968

梦境

算法一

$O(n!)$ 枚举IcePrincess_1968的每段梦境和IcePrince_1968的哪个梦境转折点匹配，再 $O(n)$ 检查方案是否合法

时间复杂度: $O(n * n!)$

期望得分: 30分

算法二

注意到梦境和梦境转折点实际上形成的是一个二分图，我们只要求二分图的最大匹配就可以了，使用匈牙利算法可以做到 $O(n^3)$

时间复杂度: $O(n^3)$

期望得分：50分

算法三

考虑贪心，将梦境转折点从小到大排序，依次为每个梦境转折点安排梦境。

考虑当前所有还未被选中的，左端点在当前梦境转折点左边的区间，从中选右端点在当前梦境转折点右边且最靠左的区间与其匹配即可，如果没有则跳过。正确性比较显然，这里不给出证明。

时间复杂度: $O(n^2)$

期望得分: 70分

算法四

考虑用优先队列优化上述的贪心过程。我们先将所有的梦境区间按照左端点从小到大排序，从小到达枚举梦境转折点的过程中，我们把当前左端点在转折点左边且还没有被加入优先队列的区间加进优先队列，优先队列是以右端点为关键字的小根堆。然后将右端点在当前转折点之前的区间直接扔掉，找到第一个在转折点右边的区间与当前转折点匹配即可。

时间复杂度: $O(n\log n)$

期望得分: 100分

玩具

算法一

搜索所有可能的树的形态，即搜索每个点的父亲是哪一个，然后求一下所有情况下树高的总和，最后除以情况数。因为 $p \leq 10^6 + 7$,所以可以用枚举的方法求逆元。

时间复杂度: $O(n! + p)$

期望得分：20分

算法二

我们事实上关心的不是树的形态，而是每种深度的点有多少个，考虑任意一棵树，我们将所有点的深度排序，这个数组一定是连续的，即差分之后，每个数不是0就是1，所以可以将这个差分后的01串作为Mask进行状压dp,转移的时候枚举下一个点即可

时间复杂度: $O(2^n * n)$

期望得分：50分

算法三

考虑非指数级的dp。令dp[i][j]表示有i个点按照题目中的方法生成的深度为j的树有多少棵，转移用树上背包，要注意子树的深度是可以小于j-1的，但至少要有棵子树的深度是j-1,所以背包的还要加一个01状态

时间复杂度: $O(n^4)$

期望得分：70分

算法四

预处理dp[i][j]表示i个点的森林，有j个点在第一棵树的概率，转移考虑第i个点是否在第一棵子树中，我们有状态转移方程

$$dp[i][j] = dp[i-1][j-1] * (j-1) * inv[i] + dp[i-1][j] * (i-j) * inv[i]$$

考虑修改算法三中状态的含义，令f[i][j]表示有i个点的树，深度不超过j的概率，g[i][j]表示有i个点的森林，深度不超过j的概率，f[i][j]直接从g[i-1][j-1]转移来:g[i][j]考虑枚举第一棵树的大小k，从一棵树和一个森林转移来，同时还要乘上第一棵子树大小为k的概率，我们有状态转移方程：

$$g[i][j] = \sum_{k=1}^i f[k][j] * g[i-k][j] * dp[i][k]$$

具体的细节可以见标程。最后只要用f[n][j]-f[n][j-1]就可以得到深度为j的树的概率

时间复杂度： $O(n^3)$

期望得分: 100分

飘雪圣域

算法一

对于每一个询问，将所有没有被暴风雪影响到的点找出来，两两枚举判断他们是否连通

时间复杂度： $O(n^3)$

期望得分：30分

算法二

在算法一中，并不需要两两枚举点对，只需要找出两个端点都没有被暴风雪影响的边，用并查集维护一下连通性即可

时间复杂度： $O(n^2)$

期望得分：50分

算法三

事实上，对于一个询问 l_i,r_i ，只要知道两个端点都没有被暴风雪影响到的“好边”的条数num，就能 $O(1)$ 算出连通块的个数。考虑没新加一条边将两个原本不连通的点连在一起，就会少一个连通块，所以答案是 $r_i - l_i + 1 - num$

考虑如何快速算出有多少条“好边”。考虑离线，将原树中所有的边按照编号较大的点从大到小排序，再将询问按右端点从大到小排序。用一个树状数组来维护所有区间的左端点，刚开始将所有区间的左端点加入BIT，随着询问区间右端点的左移，必然会有一些新的右端点在区间右端点之左的边变得不合法，将这些变从BIT里删除，即BIT实时维护右端点在当前查询区间右端点左边的所有树边的左端点。因为左端点一定在右端点左边，所以只要一条树边的左端点在查询区间的左端点右边，这条边就一定合法，所以抓着每个询问在BIT里面查询一下即可

时间复杂度: $O(m\log n)$

期望得分：100分

算法四

这题实际上存在在线做法。考虑用更高级的数据结构维护上述的离线过程。我们将所有的树边按照编号较小的点从小到大排序，然后用右端点建一个可持久化权值线段树，这样对于每个询问，我们只要在li~ri的线段树中查询比ri小的数有多少个就行了（常数会较大）

时间复杂度： $O(m\log n)$

期望得分：100分